Zur synthetischen Begründung der projektiven Geometrie der Ebene

Inaugural - Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades
der
Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Johann Wolfgang Goethe - Universität
zu
Frankfurt am Main

Kennziffer D 30

vorgelegt
von
Friedrich Bennhold
Frankfurt/Main
1 9 5 4

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

In dieser Arbeit werden die ebenen projektiven Verknüpfungssätze, die projektiven Anordnungsaxiome einschließlich des Axioms, daß sich harmonische Punktepaare trennen, und das Archimedische Postulat in projektiv geometrischer Form als gültig vorausgesetzt.

Es wird zunächst eine Methode angegeben, um aus diesen Voraussetzungen und dem Desargues'schen Satz D_8, bei dem die Ecken des einen Dreiecks je auf einer Seite des anderen liegen, den Pappus-Pascal'schen Satz rein synthetisch, also nicht auf dem bisher üblichen Umweg über eine analytische Geometrie, auf indirekte Weise abzuleiten. Dazu beweist man mit Hilfe des Archimedischen Postulates aus einem dem Satz D_8 äquivalenten 8-parametrigen Spezialfall des Pappus'schen Satzes zunächst den kleinen Pappus'schen Satz und alsdann aus diesem den allgemeinen Pappus'schen Satz. Die Beweismethode besteht darin, daß sich durch die Annahme, die Figur des betreffenden Satzes schließe sich nicht, ein gewisses Punktintervall ergibt; in diesem konstruiert man einen Punkt einer geeignet liegenden bereits als gültig erwiesenen Pappus- Konfiguration mit um eins niedrigerer Parameterzahl und hat damit einen Widerspruch zu den Anordnungsaxiomen.

Dieser Gedanke wird dazu verwendet, um die Voraussetzungen zum Beweis des Pappus'schen Satzes zu modifizieren. Es wird der folgende 8-parametrige Schnittpunktsatz S_n^q in projektiver Form zugrundegelegt.

Sei $g_1 // g_2$, seien V_o, V_1 auf g_1, W_o auf g_2; bestimmt man die Punkte V_i, W_i rekursiv durch $W_i V_i // W_o V_o$, $V_{i+1} W_i // V_1 W_o$, und sind n und q zwei feste natürliche Zahlen, dann ist $V_o W_q // V_n W_{n+q}$.

Mit diesem Satz läßt sich, falls $q = n-1$ ist, unter Zuhilfenahme des Archimedischen Postulates der oben erwähnte 8-parametrige Spezialfall des

Pappus'schen Satzes beweisen, also auf Grund der obigen Resultate auch der allgemeine Pappus'sche Satz. Das Gleiche gilt, wenn man den Satz S^n_n, bzw. wenn man einen der beiden dazu dualen Sätze zugrundegelegt. Damit ist der allgemeine Pappus'sche Satz aus dem Archimedischen Postulat und einem ebenen 8-parametrigen Schnittpunktsatz bewiesen, der eine beliebige Zahl von Konstruktionsschnitten enthält.

Ein wesentliches Hilfsmittel hierbei ist der nur mit Hilfe des Archimedischen Postulates beweisbare Hilfssatz: Sei W_o auf g_2, V_o auf g_1, $g_1 /\!/ g_2$, PQ ein Intervall auf g_1, n eine gegebene ganze Zahl; dann ist V_1 so bestimmbar, daß bei der Konstruktion der Punkte V_i, wie sie im Schnittpunktsatz S^q_n angegeben ist, der Punkt V_n in das Intervall PQ fällt.

Darüber hinaus werden Abhängigkeiten zwischen anderen, ebenfalls durch n Konstruktionsschnitte entstehenden Schnittpunktsätzen aufgezeigt.

Auf direktem Wege wird bewiesen:

Der projektive Desargues'sche Satz D_{11} ist der projektiv verallgemeinerten Figur des multiplikativen Assoziativgesetzes äquivalent; der kleine Desargues'sche Satz ist der verallgemeinerten Figur des Alternativgesetzes äquivalent; ein der Assoziativfigur verwandter Schnittpunktsatz ist dem Pappus'schen Satz äquivalent.

Es wird schließlich durch Spezialisierung der bisher zugrunde gelegten Form des Archimedischen Postulates ein rein synthetischer Beweis des algebraischen Satzes gegeben, daß ein archimedisch geordneter Alternativkörper ein Körper ist.

Lebenslauf:

Am 17. Oktober 1927 wurde ich in Mülheim/Ruhr als Sohn des Kaufmanns Dr. rer. pol. Günther Bennhold und seiner Ehefrau Marga, geb. Neumann, geboren. Im folgenden Jahr verzogen meine Eltern mit mir nach Berlin , im Jahre 1933 nach Stettin. Dort begann ich zu Ostern 1934 meinen Schulbesuch in der dortigen Pestalozzi-Schule. Im folgenden Jahr übersprang ich eine Klasse. Im Jahre 1936 erfolgte ein weiterer Umzug nach Belgard i. Pomm. Hier trat ich Ostern 1937 in die Oberschule für Jungen ein. Nach dem Tode meines Vaters verzog meine Mutter mit mir nach Frankfurt/Main, wo ich den Besuch der höheren Schule in der Musterschule fortsetzte. Von 1940 bis zu meiner Einberufung als Luftwaffenhelfer im Februar 1943 hatte ich ebenfalls Unterricht am Hoch'schen Konservatorium zu Frankfurt/M. Im Dezember 1944 wurde ich zur Wehrmacht eingezogen, im April 1945 gefangengenommen und im Februar 1946 entlassen. Nach Absolvierung eines Abitur-Sonderlehrganges immatrikulierte ich mich zum Wintersemester 1946/47 an der Universität Frankfurt. Im Februar 1951 legte ich mein Staatsexamen in Mathematik und Physik ab. Im Oktober 1951 begann meine zweijährige Ausbildungszeit als Studienreferendar , die im September 1953 mit dem Assessorexamen beendet wurde. Während dieser Zeit verfasste ich auf Anregung von Frau Prof. Dr. R. Monfang die vorliegende Doktorarbeit.

1. Referent: Prof. Dr. R. Monfang

2. Referent: Prof. Dr. W. Franz

Tag der mündlichen Prüfung: 22. Februar 1954

54/172 x